



# Kugle på pladespiller

Fusion og Plasma Road Show  
Filip Anselm Rasmussen, Risø, 10. oktober 2007

## Introduktion

Dette eksperiment viser hvordan en kugle, der placeres på en roterende skive, såsom en pladespiller, vil opføre sig og bevæge sig ligesom en ladet partikel i et elektrisk og magnetisk felt.

**Emner:** Klassisk mekanik, kræfter og bevægelse, impuls-, kraft- og inertimoment, Lorentz-kraften, elektromagnetiske felter.

## Materialer

- Pladespiller eller roterende skive, bedst med variabel rotationshastighed
- Metalkugle ca. 1 cm i diameter

## Forsøgsbeskrivelse

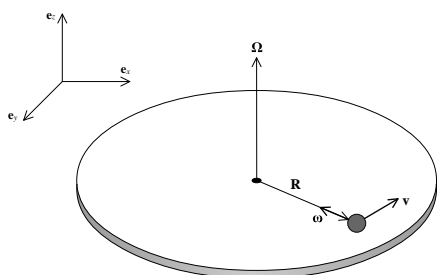
Pladespilleren sættes til at rotere med en konstant rotationshastighed. Langsomt placeres kuglen på skiven et stykke væk fra centrum, man kan med fordel holde kuglen stille på pladen indtil kuglen er begyndt at rotere med konstant hastighed. Når kuglen slippes vil den begynde at bevæge sig i cirkler på pladen. Hvis pladen tiltes til den ene side vil kuglen bevæge sig i cirkelbevægelser vinkelret på retningen, der går nedad, hvilket man ikke umiddelbart og rent intuitivt ville forestille sig.

## Sikkerhed

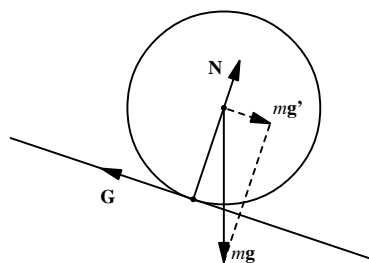
Man skal være opmærksom på at hvis skiven roterer med en meget stor hastighed, kan kuglen blive slynget ud med høj fart og i værste tilfælde ramme personer eller skrøbelige genstande. Det kan derfor være en god ide at afskærme skiven.

## Teori

At kuglen bevæger sig på den observerede måde er ikke ren magi og kan også forudsiges ud fra beregninger på systemets mekanik. I det følgende vil kuglens bevægelsesligning udledes.



**Figur 1:** Tegning af systemet med relevante størrelser.  $\Omega$  er skivens vinkelhastighed,  $\mathbf{R}$  er kuglens stedvektor,  $\mathbf{v}$  er kuglens hastighed og  $\omega$  er kuglens vinkelhastighed.



**Figur 2:** Kræfter der virker på kuglen.  $m\mathbf{g}$  er tyngdekraften,  $\mathbf{N}$  er normalkraften og  $\mathbf{G}$  er gnidningskraften. Tyngdeaccelerationen  $\mathbf{g}$  projiceret på skivens plan kaldes  $\mathbf{g}'$ .

Vi vil her betragte en kugle på en pladespiller, som systemet illustreret på figur 1. Kuglen har massen  $m$ , radius  $r$  og inertimomentet om dens akse er  $I = \frac{2}{5}mr^2$ . Kuglen ligger på en cirkelskiveformet plade, der roterer med en konstant vinkelhastighed  $\Omega$ . Til ethvert tidspunkt er kuglens position i forhold til pladens centrum givet ved stedvektoren  $\mathbf{R}$ , se desuden figur 1. Det antages at kuglen udelukkende udfører en ren rulning på pladen, dvs. at gnidningskraften mellem kugle og plade ikke udfører noget arbejde (kuglen skrider ikke).

Vi betragter det generelle tilfælde, hvor skiven ikke behøver være placeret horisontalt og de kræfter, der påvirker kuglen, fremgår af figur 2. På figuren er angivet gnidningskraften  $\mathbf{G}$ , normalkraften  $\mathbf{N}$ , tyngdekraften  $m\mathbf{g}$  og tyngdekraften projiceret på skivens plan,  $m\mathbf{g}'$ .

Kuglen triller om sin akse i skivens plan med vinkelhastigheden  $\omega$ . I forhold til et fast punkt på skiven vil kuglen derfor bevæge sig med hastigheden  $-\omega \times (-r\mathbf{e}_z) = \omega \times r\mathbf{e}_z$ . Men da pladen ligeledes roterer med en vinkelhastighed  $\Omega$  har det faste punkt på pladen en hastighed på  $\Omega \times \mathbf{R}$  og kuglens

absolutte hastighed bliver da

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times r\mathbf{e}_z \quad (1)$$

Ved at differentiere udtrykket for  $\mathbf{v}$  findes kuglens acceleration, der således er givet ved

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times r\mathbf{e}_z + \boldsymbol{\omega} \times r \frac{d\mathbf{e}_z}{dt} \\ &= \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times r\mathbf{e}_z \\ &= \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times r\mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (2)$$

hvor de to sidste lighedstegn gælder, da  $\mathbf{e}_z$  og  $\boldsymbol{\Omega}$  begge er konstante og  $\mathbf{v}$  jo netop er den tidsafledte af  $\mathbf{R}$ .

Da der antages ren rulning, må gnidningskraften være givet ved

$$\mathbf{G} = m \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (3)$$

Både gnidningskraften og normalkraften på kuglen virker ved skivens overflade, men da normalkraften er parallel med stedvektoren til gnidningskraftens virkested (røringspunktet mellem kugle og skive), fås kraftmomentet om kuglens akse til

$$\boldsymbol{\tau} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = -r\mathbf{e}_z \times \mathbf{G} = -r\mathbf{e}_z \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (4)$$

Ved at projicere samtlige kræfter ind på skivens plan fås, at den samlede kraft på kuglen i skivens plan er givet ved

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}' + \mathbf{G} = m\mathbf{g}' + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (5)$$

Ved at benytte ligning 2 og 4 får man at

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m \left( \mathbf{g}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times r\mathbf{e}_z \right) \\ &= m \left( \mathbf{g}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \frac{r}{I} \mathbf{e}_z \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times r\mathbf{e}_z \right) \\ &= m \left( \mathbf{g}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \frac{mr^2}{I} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Ved at benytte Newtons anden lov ( $\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ ), fås

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{g}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \frac{mr^2}{I} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \Leftrightarrow \\ \frac{I + mr^2}{I} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{g}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \end{aligned} \quad (7)$$

Idet der anvendes en solid kugle er  $I = \frac{2}{5}mr^2$ , hvorved  $\frac{I+mr^2}{I} = \frac{7}{2}$  og kuglens bevægelsesligning bliver derfor

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{2}{7}(\mathbf{g}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = \frac{2}{7}(\mathbf{g}' + \mathbf{v} \times (-\boldsymbol{\Omega}))$$

Eller ved brug af Newtons anden lov kan kraften på kuglen skrives som

$$\mathbf{F} = \frac{2}{7}m(\mathbf{g}' + \mathbf{v} \times (-\boldsymbol{\Omega}))$$

Det skal bemærkes at kraften kuglen er påvirket af er fuldstændig analog til den kraft en ladet partikel er påvirket af, når den befinder sig i et elektrisk og magnetisk felt, givet ved Lorentz-kraften

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

hvor ladningen  $q$  svarer til  $-\frac{2}{7}m$ , det elektriske felt,  $\mathbf{E}$ , svarer til tyngdeaccelerationen  $\mathbf{g}'$  og magnetfeltet,  $\mathbf{B}$  svarer til skivens vinkelhastighed med modsat fortegn  $-\boldsymbol{\Omega}$ . At styre en kugle på en pladespiller, svarer derfor på sin vis til at styre elektrisk ladede partikler i et plasma med elektriske og magnetiske felter.

## Yderligere information

David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3. udgave, kapitel 5 (Prentice Hall International Inc, New Jersey, 1999)